1

Métodos Numéricos
31 de mayo de 2019
Segundo Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas ☐ Completar nombre en las hojas	Lib. Univ.		Nombre y Apellido		
☐ Completar LU y nombre en el enunciado ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Ej. 1 13	Ej. 2 25	Ej. 3 25	Ej. 4 25	Nota 88 (A)

1. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que cumple:

$$A(A-I)^2 = 0, \ (A-I)^2 \neq 0 \text{ y } A(A-I) \neq 0.$$

   (a) Probar que si λ es autovalor de A entonces $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$. (10 puntos)

   (b) Probar que A no es diagonalizable. (10 puntos)

   (c) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, expresar A^k como combinación lineal de A y A^2. (5 puntos)

   (d) Para $n = 3$ dar un ejemplo de una matriz A con las condiciones dadas. (5 puntos)

2. Sea $A = U\Sigma V^t$ una descompopsición en valores singulares de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, donde $rg(A) = r$. Sean $u_1, \ldots, u_m$ las columnas de $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $v_1, \ldots, v_n$ las columnas de $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ los valores singulares de A.

   (a) Probar que $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t$. (15 puntos)
   Sugerencia: Si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = B$ si y sólo si $Ax = Bx$ para todo x en una base de $\mathbb{R}^n$

   (b) Sea $k \in \{1, \ldots, r-1\}$, definimos $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^t$. Probar que $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$. (10 puntos)

3. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq n$ y $\mu \in \mathbb{R}$ una constante positiva. Se desea resolver las ecuaciones normales $A^tAx = A^tb$ mediante el siguiente esquema iterativo dado un $x^{(0)}$ inicial:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (A^tA + \mu I)^{-1}A^t(b - Ax^{(k)}), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

   (a) Probar que si el esquema iterativo converge, resuelve el problema de las ecuaciones normales. Determinar cuál es la matriz que gobierna la iteración. (12 puntos)

   (b) Sea A de rango $r \leq n$. Probar que para cualquier $\mu > 0$ el esquema converge si y sólo si $r = n$. (13 puntos)
   Sugerencia: considerando $A = U\Sigma V^t$ una SVD de A, reescribir la matriz que gobierna la iteración como VDV^t (con D diagonal) y luego calcular sus autovalores.

4. Sea $p_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$ la familia de polinomios de grado menor o igual a 2.

   (a) Utilizando cuadrados mínimos y las ecuaciones normales, determinar dos polinomios de grado menor o igual a 2 que mejor aproximen al punto $(2, 1)$. (10 puntos)

   (b) Además de aproximar el punto $(2, 1)$, se busca que el polinomio sea lo más 'parecido' a $x^2 + x + 1$. Para ello se plantea el siguiente problema de minimización:

$$\min_{a,b,c} \ (p_{a,b,c}(2) - 1)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$$

      i. Hallar la matriz A y el vector d tal que resolver el problema planteado sea equivalente a resolver el problema de cuadrados mínimos $\min_y \|Ay - d\|_2^2$. (10 puntos)

      ii. ¿Cuántas soluciones tiene el problema planteado? (5 puntos)

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 1 = $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{cases} A(A-I)^2 = 0. \\ (A-I)^2 \neq 0 \\ A(A-I) \neq 0. \end{cases}$$

a - Si T autovalor de $A \Rightarrow T = 0$ ó $T = 1$.

Dem: Si T es autovalor de A se cumple que $\det(A - TI) = 0$.

y existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tq $Av = Tv$.

Como vale que $A(A-I)^2 = 0 \Leftrightarrow A(A^2 - 2A + I) = 0$

$\Leftrightarrow A^3 - 2A^2 + A = 0 \Leftrightarrow A = 2A^2 - A^3$

$A \cdot v = (2A^2 - A^3)v = 2A^2 v - A^3 v$

Por propiedad vista en la práctica 5.

Si T autovalor de A, v autovector asoc $\Rightarrow T^k$ autovalor de A^k con v autovector asociado $\left(\begin{array}{l} Av = Tv \\ A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(Tv) = \dots = T^k v \end{array} \right)$

Luego $Av = 2T^2 v - T^3 v$

$2T^2 v - T^3 v = Tv$

$\Leftrightarrow 2T^2 v - T^3 v - Tv = 0$

$\Leftrightarrow (2T^2 - T^3 - T)\underbrace{v}_{\neq 0} = 0$

$\therefore (2T^2 - T^3 - T) = 0$

$\Leftrightarrow (2T - T^2 - 1)T = 0$

$\Leftrightarrow (T-1)^2 T = 0$

$\Leftrightarrow T = 0$ ó $T = 1$.

NOTA

Ejercicio 2 = $A = U \Sigma V^t$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rg(A) = r$.

a - Probar que $A = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t}_{B}$.

Dem = queremos ver que $A = B$. , Veomos que $Ax = Bx$ $\forall x$ en una base de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos la siguiente base en $\mathbb{R}^n$, $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ donde v_i son los columnas de la matriz V. (dicha matriz es ortogonal, así que sus columnas forman una base ortonormal.).

Veamos que $A v_j = B v_j$ $\forall j = 1, \dots, n$. Si $j \leq r$

. $Bv_j = \left(\sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t\right) . v_j = \sigma_j u_j v_j^t . v_j = \sigma_j u_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{=1} = \sigma_j u_j$.

Como C es base ortonormal cumple $\begin{cases} \langle v_i, v_j \rangle = 0 & si\ i \neq j \\ \langle v_i, v_j \rangle = 1 & si\ i = 1 \end{cases}$

Por lo tanto sólo sobrevive el término $i = j$ de la sumatoria.

$\therefore$ $Bv_j = \sigma_j u_j$ si $j \leq r$ o $Bv_j = 0$ si $j = r+1, \dots, n$ (Pues $\sigma_j = 0$ $\forall j = r+1, \dots, n$)

. $A = U . \Sigma V^t \iff A.V = U \Sigma$

$$A . \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 \dots & v_j \dots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

$$A.v_j = \underbrace{AV.e_j}_{\text{me quedo con la columna j de A.V.}} = U.\Sigma.e_j = U . \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_j . U . e_j = \sigma_j . u_j$$

$\therefore$ $Av_j = \sigma_j . u_j$ si $1 \leq j \leq r$

$Av_j = 0$ si $j = r+1, \dots, n$.

$\therefore$ $Av_j = Bv_j$ $\forall v_j \in C$. Luego, por propiedad vale que $A = B$ #

B

b. Sea $K \in \{1, \dots, r-1\}$, $A_K = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^t$. Probar $\|A - A_K\|_2 = \sigma_{k+1}$

Dem: $\|A - A_K\|_2 \underset{\substack{\text{por ítem (a)} \\ \text{y definición de } A_K}}{=} \left\| \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^t \right\|_2$

$$= \left\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t \right\|_2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\frac{\overbrace{A_{kn}}^{\in \mathbb{R}^{k \times n}}}{\underbrace{A_{m-k\,n}}_{\in \mathbb{R}^{(m-k)\times n}}} \right)$$

Veamos que $A_{m-k\,n} = \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^t$

$$\underbrace{\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{k+1} & \dots & \tilde{u}_m \\ | & & \end{pmatrix}}_{(m-k)\times(m-k)}, \quad \underbrace{\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{k+1} & & & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_r & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{(m-k) \times n}$$

$\tilde{V} = V$

$$A_{m-k\,n} \overset{\text{qvq}}{=} \tilde{U} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \sigma_{k+1} & 0 & & 0 \\ & & & & \ddots & \sigma_r & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \, k \times n \\ \} \, (m-k) \times n \end{matrix}$$

$$= \tilde{U} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix} \cdot V_2$$

La idea es ver que $A_{m-k\,n}$ tiene una descomposición en valores singulares que depende de la SDV de A.
Para luego, por el ítem (a) llegar a que $A_{m-k\,n} = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t$ ✓
y como nos piden $\left\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t \right\|_2 = \|A_{m-k\,n}\|_2 = \underbrace{\sigma_{k+1}}_{\text{el valor singular de mayor valor}}$ ✓

Propiedad vista en la teórica ☺

(B)

HOJA Nº

FECHA

Ejercicio 3 = $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$.

queremos resolver ec. normales $A^t A x = A^t b$ por el esquema:

$$x^{k+1} = x^k + (A^tA + \mu I)^{-1} A^t (b - Ax^k)$$

a_ Si el sistema converge ⇒ resuelve ec. normales. ¿Qué matriz gobierna la iteración?

$$x^{k+1} = \underbrace{\left(I - (A^tA + \mu I)^{-1} A^t A\right)}_{= T} x^k + (A^tA + \mu I)^{-1} A^t b.$$

T matriz que gobierna la iteración ✓

Si el sistema converge, supongamos que converge a

$$x = \left(I - (A^tA + \mu I)^{-1} A^tA\right) x + (A^tA + \mu I)^{-1} A^t b.$$

$$\Leftrightarrow x - x + (A^tA + \mu I)^{-1} A^tA x = (A^tA + \mu I)^{-1} A^t b.$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A^tA + \mu I)(A^tA + \mu I)^{-1}}_{I} A^tAx = \underbrace{(A^tA + \mu I)(A^tA + \mu I)^{-1}}_{I} A^t b$$

$$\Leftrightarrow \quad A^t A x = A^t b. \quad ✓$$

Con lo cual, llegamos a que si el sistema converge, resuelve las ecuaciones normales.

b_ $rg(A) = r \leq n$. Probar que $\forall \mu > 0$ el esquema converge $\Leftrightarrow r = n$.

• Sean U, Σ, V matrices tales que $A = U \cdot \Sigma V^t$ es la descomposición SDV de A.

$$A^t = (U \Sigma V^t) = V \cdot \Sigma^t U^t$$

$$A^t A = V \Sigma^t \underbrace{U^t U}_{I} \Sigma V^t = V \Sigma^t \Sigma V^t \; ✓$$

NOTA

$$T = I - (A^tA+\mu I)^{-1}A^tA$$
$$= (A^tA+\mu I)^{-1}(A^tA+\mu I) - (A^tA+\mu I)^{-1}A^tA$$
$$= (A^tA+\mu I)^{-1}\left(\cancel{A^tA}+\mu I - \cancel{A^tA}\right)$$
$$= (A^tA+\mu I)^{-1}\mu I$$
$$= \mu\left(V\Sigma^t\Sigma V^t + \mu I\right)^{-1}$$
$$= \mu\left(V\Sigma^t\Sigma V^t + \mu VV^t\right)^{-1}$$
$$= \mu\left((V\Sigma^t\Sigma + \mu V)V^t\right)^{-1}$$
$$= \mu\left(V(\Sigma^t\Sigma + \mu I)V^t\right)^{-1}$$
$$T = \mu . V\,(\Sigma^t\Sigma + \mu I)^{-1}V^t$$

$$\Sigma^t\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_r \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 & \\ & \sigma_r^2 & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{n\times n} = N$$

la matriz $D=\Sigma^t\Sigma+\mu I$ es una matriz diagonal, por ende su inversa es una diagonal y los elem de la diagonal de D^{-1} son $\frac{1}{d_{ii}}$ con d_{ii} elem de la diagonal de D.

(notar que como $\mu>0 \Rightarrow d_{ii}\neq 0 \ \forall i$.)

$\therefore T = \mu . V D^{-1} V^t$

Con ésto tenemos que T es semejante a la matriz $\mu . D^{-1}$ por lo tanto T y μD^{-1} tienen los mismos autovalores.

Luego, los autovalores de T son: $T_i = \frac{\mu}{d_{ii}} = \frac{\mu}{n_{ii}^2+\mu}$, n_{ii} elem i-ésimo de la diag de N.

Queremos probar que el esquema converge $\Leftrightarrow r=n$.
lo que es equivalente a ver que $\underbrace{\rho(T)}_{\text{radio espectral de } T} < 1 \Leftrightarrow r=n$

NOTA

$$\rho(T) = \text{máx}\,\{\, |T| : T \text{ autovalor de } T \}.$$

$$\rho(T) = \text{máx}\left\{ \left| \frac{\mu}{n_{ii}^2+\mu} \right| ,\ \mu > 0 \right\}$$

$$= \text{máx}\left\{ \frac{\mu}{n_{ii}^2+\mu} ,\ \mu > 0 \right\} = \frac{\mu}{\min\limits_i\{n_{ii}^2\} + \mu}$$

$$\min_i\{n_{ii}^2\} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ \sigma_n^2 \neq 0 & \text{si } r = n \end{cases}$$

$$\therefore\ \rho(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < n \\ \dfrac{\mu}{\sigma_n^2+\mu} & \text{si } r = n \end{cases}$$

$\therefore$ Si el sistema no converge $\Leftrightarrow$ $r < n$.

Si $r = n$ $\Leftrightarrow$ $\rho(T) = \dfrac{\mu}{\sigma_n^2+\mu}$

$$r = n \Leftrightarrow 0 < \sigma_n^2 \Leftrightarrow \mu < \sigma_n^2 + \mu$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu}{\sigma_n^2+\mu} < 1$$

$$\Leftrightarrow \rho(T) < 1.$$

$\therefore$ El sistema converge $\Leftrightarrow$ $r = n$. #

$\underbrace{A}_{1\times 3}\ \underbrace{x}_{3\times 1} = \underbrace{b}_{1\times 1}$

Ejercicio 4 = $P_{a,b,c}(x) = ax^2+bx+c$ polinomios de grado menor o igual a 2.

a - Usando CM y ec. normales hallar 2 polinomios de grado menor o igual a 2 que mejor aproximen al punto $(2,1)$.

quiero $\min\limits_{f \in P_{a,b,c}} \sum\limits_{i=1}^{1} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 = \min\limits_{a,b,c} \left(a x_1^2 + b x_1 + c - y_1\right)^2$

$x_1 = 2$

$y_1 = 1$

$\Updownarrow$

$\min\limits_{\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 1}} \|A\alpha - b\|_2^2$

$\Updownarrow$

$A^t A\, \alpha = A^t b$

ec. normales

Sea $A = (4\ 2\ 1) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$

$b = 1 \in \mathbb{R}^1$

$\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

Veamos cómo nos quedan las ec. normales:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (4\ 2\ 1) = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t A\, \alpha = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16a + 8b + 4c \\ 8a + 4b + 2c \\ 4a + 2b + c \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Nos quedó el siguiente sistema $\begin{cases} 16a + 8b + 4c = 4 \\ 8a + 4b + 2c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow c = 1 - 4a - 2b$

$(a,b,c) = \langle (a, b, 1-4a-2b) \rangle$

NOTA

. Si elijo $a = b = 1$ obtengo el polinomio p_1 tq
$$p_1(x) = x^2 + x - 5$$
. Si elijo $a = 0$, $b = 1$, obtengo el polinomio p_2 tq
$$p_2(x) = x - 1$$
Y así puedo obtener infinitos polinomios de grado menor o igual a 2 que me aproximen el punto $(2,1)$.

b- Además de aproximar a $(2,1)$ queremos que el polinomio se "parezca" a $x^2 + x + 1$:
$$\min_{a,b,c} \left(p_{a,b,c}(2) - 1 \right)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \quad (*)$$
i- Hallar A, d tq el problema planteado sea equivalente a resolver $\min_{y} \|Ay - d\|_2^2$

Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times3}$.
$$y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times1}$$

$(*)$ es equivalente a $\min_{y} \|Ay - d\|_2^2$, pues:
$$A \cdot y - d = \begin{pmatrix} 4a+2b+c-1 \\ a-1 \\ b-1 \\ c-1 \end{pmatrix} \qquad \|Ay - d\|_2^2 = (4a+2b+c-1)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$$
Como $p_{a,b,c}(2) = 4a + 2b + c$. $\Rightarrow \|Ay-d\|_2^2 = (p_{a,b}(2)-1)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$.

c- El sistema planteado tiene solución única pues las columnas de A son L.I.

HOJA Nº

FECHA

Veamos que las columnas de A son li:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4F_3+F_1]{-2F_2+F_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

ésto me indica que las columnas de A son li.

NOTA